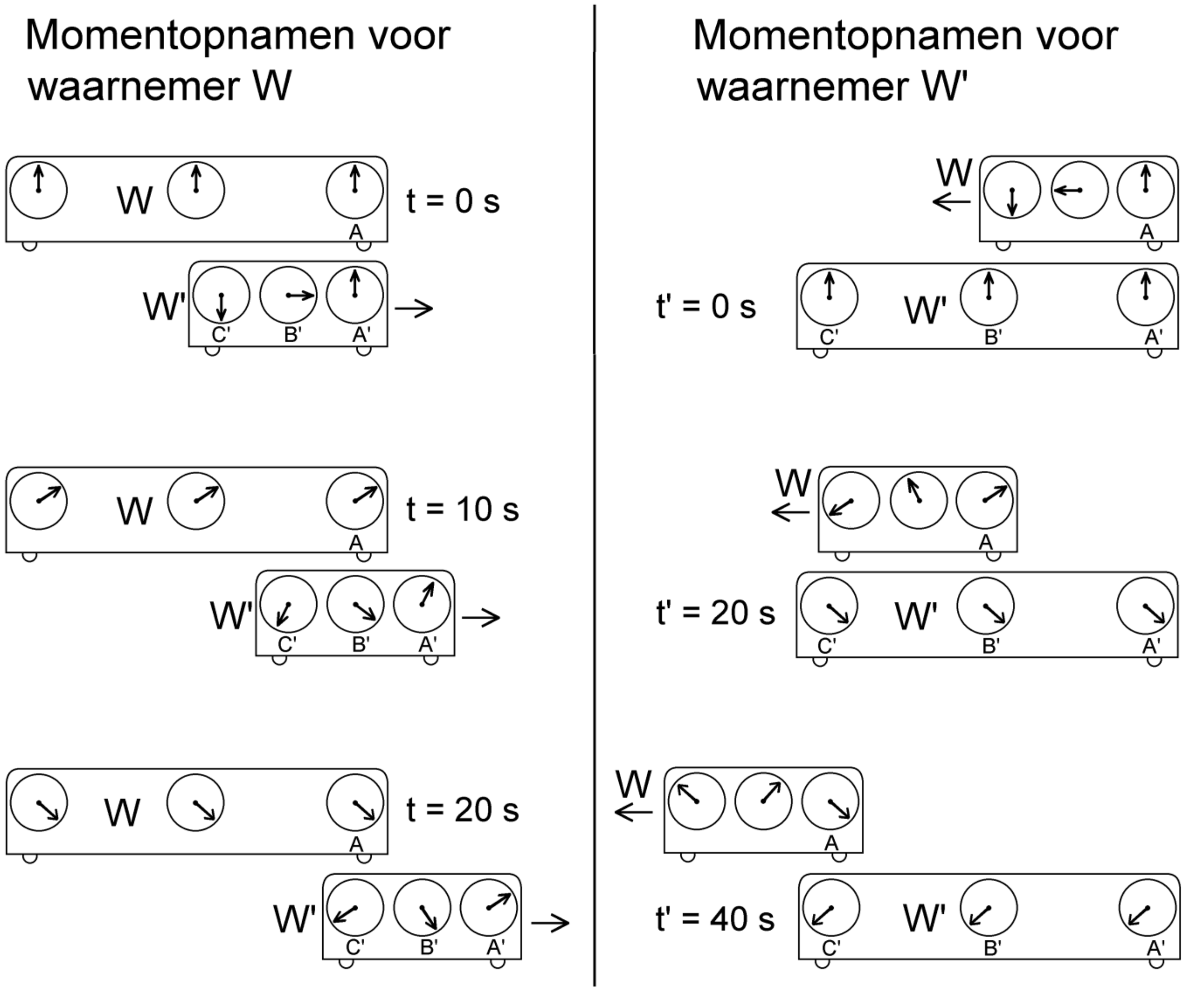
Voorbeeld: stopwatches in passerende treinen

Inleiding

In de onderstaande figuren rijden twee identieke treinen met hoge snelheid langs elkaar. In de ene trein bevindt zich waarnemer W; in de andere trein waarnemer W'. Voor waarnemer W beweegt de trein van waarnemer W' naar rechts en voor waarnemer W' beweegt de trein van waarnemer W naar links. De rustlengte van beide treinen is gelijk. Ten gevolge van 'lengtekrimp' is voor elke waarnemer de trein van de andere waarnemer korter dan de eigen trein.

In beide treinen bevinden zich drie stopwatches: één in het midden en twee bij de uiteinden. De stopwatches hebben alleen een secondewijzer. In de trein van waarnemer W is de meest rechtse stopwatch aangeduid met A. In de trein van waarnemer W' zijn de drie stopwatches met A' en B' en C' aangegeven.



We nemen drie gebeurtenissen onder de loep namelijk waarbij stopwatch A achtereenvolgens samenvalt met de stopwatches A', B' en C'. In de linker figuren worden deze situaties bekeken vanuit waarnemer W en in de rechter figuren vanuit waarnemer W'. In de eerste situatie, dus waarbij A samenvalt met A', zetten beide waarnemers hun stopwatches op nul.

We gaan er hierna vanuit dat de onderlinge snelheid tussen de treinen gelijk is aan 86,6% van de lichtsnelheid. De lorentzfactor (symbool gamma) is dan gelijk aan 2. De lengte van elke trein is dan dus met een factor 2 kleiner geworden voor de waarnemer in de andere trein.

We kunnen nu het volgende opmerken.
1.
Voor elke waarnemer lopen de stopwatches in de eigen trein gelijk aan elkaar en in de andere trein ongelijk aan elkaar. Als een waarnemer twee stopwatches in de andere trein met elkaar vergelijkt, loopt de voorste stopwatch (gelet op de bewegingsrichting) achter op de achterste stopwatch.
2.
Elke stopwatch in de andere trein heeft de halve draaisnelheid ten opzichte van de stopwatches in de eigen trein. Denk hierbij aan tijdsduurrek met gamma = 2.
3.
Voor waarnemer W zit er 20 s tussen de eerste en de derde gebeurtenis. Voor W' is dat 40 s. Dat is logisch omdat de trein van W voor W' een twee keer zo grote afstand moet afleggen als de trein van W' voor W. Dit is het gevolg van lengtekrimp met gamma = 2.
4.
Ga na dat de standen van de samenvallende stopwatches (A met A', A met B' en tenslotte A met C') in de linker en de rechter figuren steeds met elkaar overeenkomen.

Voor beide waarnemers lopen de stopwatches in de andere trein ongelijk aan elkaar. Het tijdverschil tussen de buitenste stopwatches bedraagt 30 s. Dit is als volgt te bewijzen. Daarbij nemen we L als afstand tussen deze buitenste stopwatches in de eigen trein. Volgens de invariantie van het ruimtetijdinterval tussen de eerste en de derde gebeurtenis geldt (met lichtseconde als eenheid voor L):

$$20^2 - 0^2 = 40^2 - L^2$$

Hieruit volgt:

$$L^2 = 40^2 - 20^2$$

Volgens de lorentztransformatie geldt voor het tijdverschil Δt tussen de buitenste stopwatches in de ogen van de waarnemer in de andere trein:

$$c\Delta t = \gamma \cdot \beta \cdot L/\gamma = \beta \cdot L$$

Met v = L/40 wordt dit:

$$c\Delta t = \frac{1}{c} \cdot \frac{L}{40} \cdot L = \frac{1}{c} \cdot \frac{40^2 - 20^2}{40} = 30$$

Hieruit volgt: Δt = 30 s.